

Exercices de Mécanique Quantique

Séance 9

1. Donner la liste des états de spin total du noyau d'hélium 3He en fonction des états individuels.
2. Image de Schrödinger et de Heisenberg.
 - (a) Retrouver l'équation d'évolution temporelle d'un opérateur dans l'image de Heisenberg pour un système non nécessairement conservatif. En déduire la généralisation du théorème d'Ehrenfest. Obtenir pour cela une relation entre opérateurs et non plus entre valeurs moyennes. Quelle condition assure que cette image représente correctement la mécanique quantique ?
 - (b) Soit $Q_H(t)$ l'opérateur de position dans l'image de Heisenberg. Calculer $[Q_H(t), Q_H(0)]$ pour une particule libre à une dimension. Même question dans le cas de l'oscillateur harmonique.
 - (c) Calculer l'étalement d'un paquet d'ondes électronique après 0.1 s. Considérer $\Delta Q_H(0) = 10^{-10}m$.
3. Point de vue d'interaction. On considère un système physique quelconque. On désigne par $H_0(t)$ son hamiltonien et par $U_0(t, t')$ l'opérateur d'évolution correspondant.

- (a) Montrer que

$$i\hbar \frac{d}{dt} U_0(t, t_0) = H_0(t) U_0(t, t_0) . \quad (1)$$

- (b) On suppose maintenant que l'on perturbe le système, de sorte que son hamiltonien devient

$$H(t) = H_0(t) + W(t) . \quad (2)$$

Le vecteur d'état du système dans le "point de vue d'interaction", $|\psi_I(t)\rangle$, est défini à partir du vecteur d'état $|\psi_S(t)\rangle$ dans le point de vue de Schrödinger par

$$|\psi_I(t)\rangle = U_0^\dagger(t, t_0) |\psi_S(t)\rangle . \quad (3)$$

i. Montrer que l'évolution de $|\psi(t)\rangle$ est donnée par

$$i\hbar \frac{d|\psi_I(t)\rangle}{dt} = W_I(t)|\psi_I(t)\rangle, \quad (4)$$

où $W_I(t)$ est l'opérateur transformé de $W(t)$ par la transformation unitaire associée à $U^\dagger(t, t_0)$. Expliquer qualitativement pourquoi, lorsque la perturbation $W(t)$ est très petite devant $H_0(t)$, le mouvement du vecteur $|\psi_I(t)\rangle$ est beaucoup plus lent que celui de $|\psi_S(t)\rangle$.

ii. Puisque l'équation différentielle précédente est équivalente à l'équation intégrale

$$|\psi_I(t)\rangle = |\psi_I(t_0)\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t W_I(t')|\psi_I(t')\rangle dt', \quad (5)$$

où $|\psi_I(t_0)\rangle = |\psi_S(t_0)\rangle$, et en résolvant cette équation par itération, montrer que le ket $|\psi_I(t)\rangle$ peut être développé en puissances successives de W sous la forme

$$|\psi_I(t)\rangle = \left[I + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' W_I(t') + \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{t_0}^t dt' W_I(t') \int_{t_0}^{t'} dt'' W_I(t'') + \dots \right] |\psi_I(t_0)\rangle. \quad (6)$$

4. Calculer l'évolution temporelle des opérateurs de création et d'annihilation de l'oscillateur harmonique à une dimension dans la représentation de Heisenberg.